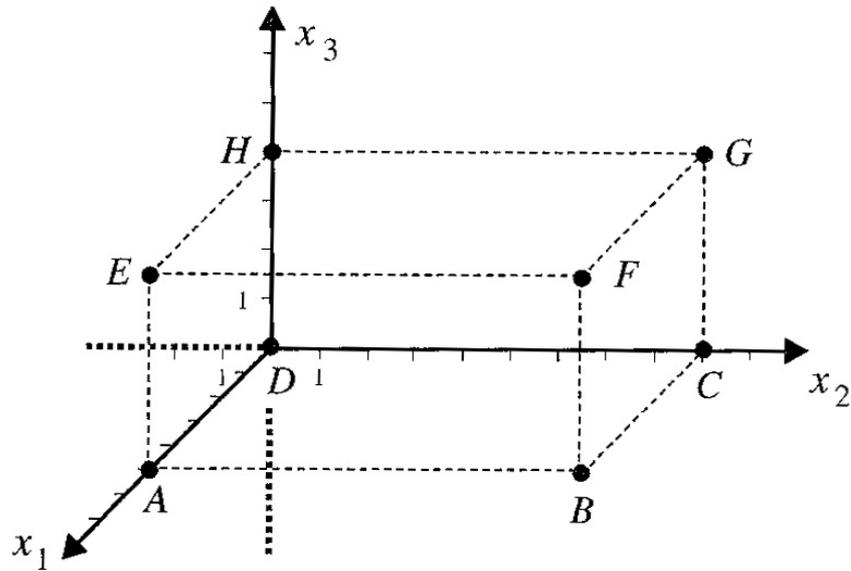


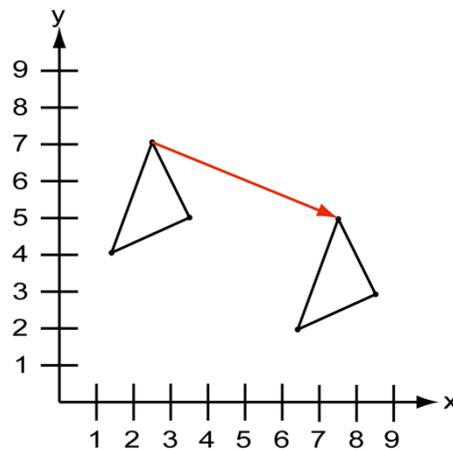
## Der Vektorbegriff



Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Quaders.

$A(5/0/0)$ ,  $B(5/9/0)$ ,  $C(0/9/0)$ ,  $D(0/0/0)$ ,  $E(5/0/4)$ ,  $F(5/9/4)$ ,  $G(0/9/4)$ ,  $H(0/0/4)$

In der folgenden Abbildung ist eine Verschiebung (Translation) dargestellt. Dabei wird durch einen Verschiebungspfeil (Vektor) jedem Punkt  $P$  der Ebene oder Raumes genau ein Bildpunkt  $P'$  zugeordnet.



Die Menge aller Pfeile einer Translation wird als Verschiebungsvektor oder kurz Vektor bezeichnet.

Länge eines Vektors:

Die Maßzahl für die Länge eines Vektors  $\vec{a}$  wird mit  $|\vec{a}|$  (Betrag von  $\vec{a}$ ) bezeichnet.

In der Ebene:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$     Im Raum:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Der Vektor mit der Länge Null heißt Nullvektor.

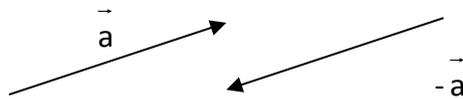
Im Raum gilt:  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Weitere wichtige Vektoren:

1) Gegenvektor:

Ein zu einem Vektor  $\vec{a}$  entgegengesetzt orientierter Vektor gleicher Länge heißt Gegenvektor oder inverser Vektor zu  $\vec{a}$ .

Bezeichnung:  $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$



2) Einheitsvektor:

Ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor oder normierter Vektor.

Bezeichnung:  $\vec{a}^0$

3) Verbindungsvektor zweier Punkte

$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$     „Spitze minus Fuß“

4) Ortsvektor

Die Translation, die den Ursprung 0 in den Punkt P abbildet, heißt Ortsvektor von P.



Bezeichnung:  $\overrightarrow{OP}$  oder  $\vec{p}$       $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ p_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Aufgaben:

1.0 Bestimmen Sie zu P den Bildpunkt Q bei Verschiebung um den Vektor  $\vec{a}$ .

1.1 P(0/-2)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.2 P(-1/-1/0)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.0 Bestimmen Sie den Vektor  $\vec{a}$ , der den Punkt P in den Punkt Q verschiebt.

2.1 P(1/-2) Q(-1/-2)

2.2 P(1/-1/2) Q(-2/-2/5)

3.0 Bestimmen Sie zum Punkt Q und zum Vektor  $\vec{a}$  den Urbildpunkt P.

3.1 Q(0/-1)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.2 Q(-3/1/-1)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.0 Bestimmen Sie  $a, b, c \in \mathbb{R}$  so, dass Q der Bildpunkt von P bei der Translation  $\vec{a}$  ist.

4.1 P(a/2/c) Q(1/b/3)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$

4.2 P(a/2b/3) Q(2b/1/c)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2c \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1.1 Q(3/2)      1.2 Q(0/1/1)

$$2.1 \vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.2 \vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.1 P(3/-3)      3.2 P(-3/1/-2)

4.1

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ b-2 \\ 3-c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a \\ b-2 \\ 3-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad 1-a=c$$

$$\text{(II)} \quad b-2=-2 \Rightarrow b=0$$

$$\text{(III)} \quad 3-c=c \Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1-a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

4.2

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2b \\ 1 \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-a \\ 1-2b \\ c-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2b-a \\ 1-2b \\ c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad 2b-a=2c$$

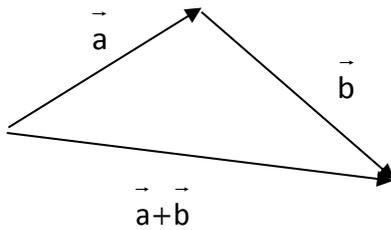
$$\text{(II)} \quad 1-2b=2a \Rightarrow 2b=1-2a$$

$$\text{(III)} \quad c-3=1 \Rightarrow c=4$$

$$\Rightarrow 1-2a-a=2c \Rightarrow 1-3a=8 \Rightarrow a=-\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 2b=1-2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \Rightarrow 2b=\frac{17}{3} \Rightarrow b=\frac{17}{6}$$

### Addition von Vektoren:



$$\text{Im } \mathbb{R}^2: \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im } \mathbb{R}^3: \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

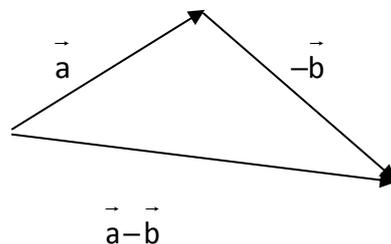
### Eigenschaften der Vektoraddition:

Für alle Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  der Ebene oder des Raumes gilt:

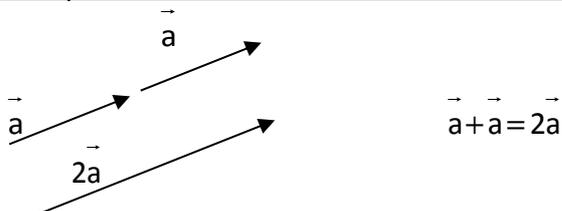
- a)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  Kommutativgesetz
- b)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  Assoziativgesetz
- c)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$  (Neutrales Element)
- d)  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$  (Inverses Element)

### Subtraktion von Vektoren:

Die Differenz zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  wird gebildet, indem man zu  $\vec{a}$  den Gegenvektor von  $\vec{b}$  addiert.  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



### Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (S-Multiplikation):



Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man jede Koordinate mit dieser Zahl multipliziert.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \end{pmatrix} \quad \alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Folgerung:

Der Vektor  $\alpha \cdot \vec{a}$  ist  $|\alpha|$ -mal so lang wie der Vektor  $\vec{a}$ .

$\alpha > 0$ :  $\vec{a}$  und  $\alpha \cdot \vec{a}$  sind gleichgerichtet

$\alpha < 0$ :  $\vec{a}$  und  $\alpha \cdot \vec{a}$  sind entgegengesetzt gerichtet

Eigenschaften der S-Multiplikation:

Für alle Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  der Ebene oder des Raumes und reelle Zahlen  $\alpha, \beta$  gilt:

a)  $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$  V(ektorielles) Distributivgesetz

b)  $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$  S(kalares) Distributivgesetz

c)  $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$  Assoziativgesetz

d)  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$        $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

e)  $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Folgerung:

Durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl kann jeder Vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$  zu einem

Einheitsvektor normiert werden:  $\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

## Anwendungen zum Rechnen mit Vektoren

### (1) Gleichheit zweier Vektoren:

Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden Komponenten übereinstimmen.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{array}$$

### (2) Parallelität von Vektoren:

Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind genau dann parallel, wenn gilt:

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b_1 = \alpha \cdot a_1 \\ b_2 = \alpha \cdot a_2 \\ b_3 = \alpha \cdot a_3 \end{array}$$

Aufgaben:

1.0 Gegeben sind die Punkte  $A(2/1/3)$ ,  $B(-1/3/-2)$  und  $C(0/1/-1)$ .  
Berechnen Sie die Vektoren

1.1  $\vec{AB} + \vec{AC}$

1.2  $3 \cdot \vec{AB} - \vec{CB} + 2 \cdot \vec{CA}$

2.0 Prüfen Sie, ob die angegebenen Vektoren parallel sind.

2.1  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$     $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

2.2  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$     $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1.1

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

1.2

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{CA} = -\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \vec{AB} - \vec{CB} - 2 \cdot \vec{CA} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2.1

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad 2 = \alpha \cdot 4 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{(II)} \quad 3 = \alpha \cdot 6 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind parallel

2.2

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{(I)} \quad -8 = \alpha \cdot 4 \quad \Rightarrow \alpha = -2$$

$$\text{(II)} \quad -6 = \alpha \cdot (-3) \quad \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\text{(III)} \quad 4 = \alpha \cdot (-2) \quad \Rightarrow \alpha = -2$$

$\Rightarrow \vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind nicht parallel